Es wird dann

$$\{W\} = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \{V_1\} \\ \{V_1\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

und könnte, wie man sieht, zum Zerfall gebracht werden. Widerspruch. Es muß noch gezeigt werden, daß für die beiden Darstellungen $\{\hat{W}\}$ und $\{\tilde{W}\}$ nicht ausgeartete Fundamentaltensoren existieren.

Schritt IV: Schreibt man für die rechte obere Untermatrix von $\{\tilde{W}\}$ das Zeichen Y, dann erhält man

$$\begin{aligned} g_2^{-1} Y^*(-t)\, g_2 &= g_2^{-1}[V(t) + g_2^{-1} V^*(-t)\, g_2]^*\, g_2 \\ &= g_2^{-1}[V^*(-t) + g_2^* V(t)\, (g_2^{-1})^*]\, g_2 , \end{aligned}$$

wählt man jetzt $g_2 = g^{2*}$, so ergibt sich

$$g_2^{-1} Y^*(-t)\, g_2 = Y(t) .$$

Da gleichzeitig für g_2 (b) erfüllt sein muß, wird

$$g_2 Y(t) = V_1^*(t)\, g_2 V_1(t)\, Y(t)$$

und außerdem gilt

$$Y(-t) = -V_1^{-1}(t)\, Y(t)\, V_1^{-1}(t) .$$

Führt man die letzten beiden Gleichungen in die vorangehende ein, so ergibt sich

$$\{V_1^*(t)\}\, g_2\{Y(t)\} + \{Y^*(t)\}\, g_2\{V_1(t)\} = 0 ,$$

also gilt (d). In diesem Fall kann man den Fundamentaltensor

$g = \begin{pmatrix} 0 & g_2 \\ g_2 & \lambda g_2 \end{pmatrix}$, $g_2 = g_2^*$ mit beliebigem λ wählen.

Genau so beweist man für die Darstellung W, daß der Fundamentaltensor

$g = \begin{pmatrix} 0 & -i g_2 \\ i g_2 & \lambda g_2 \end{pmatrix}$, $g_2 = g_2^*$ mit beliebigem λ verwendet werden kann.

Damit ist Satz 12 bewiesen.

Indefinite Metrik im Zustandsraum und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Von Siegfried Schlieder

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. **15 a**, 460—467 [1960]; eingegangen am 3. März 1960)

In part I invariant bilinear forms were constructed by means of suitable fundamental tensors. Invariance is one of the conditions for the probability interpretation. In the following part further conditions are specified for the "space of physical states". They are sufficient at the first instance for the probability interpretation for elements of one coherent sector.

Teil II: Der kohärente Sektor

§ 1. Übergang zur kovarianten Schreibweise, Projektionsoperatoren

Für die verschiedenen Typen von irreduziblen Darstellungen wurden in Teil I die metrischen Fundamentaltensoren angegeben. Diese Fundamentaltensoren besitzen die Eigenschaft, daß sie nicht ausgeartet sind und Hermitesch gewählt werden können. Auch für die Klasse von reduziblen, aber nicht zerfallenden Darstellungen, welche bisher in Modelltheorien auftraten, ließ sich ein nichtausgearteter Hermitescher Fundamentaltensor angeben.

Wir wollen daher im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, annehmen, daß im Zustandsraum ein nichtausgearteter, Hermitescher Fundamentaltensor existiert. Man kann dann zu der kürzeren kovarianten Schreibweise übergehen [16, *]. Seien $|\Phi_l\rangle$ die kovarianten Grundvektoren im Zustandsraum, so wird für einen Vektor $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = \Psi^l\, |\Phi_l\rangle ,$$

wobei die Ψ^l die kontravarianten Maßzahlen von $|\Psi\rangle$ in bezug auf die Basis $|\Phi_l\rangle$ sind.

Durch $\langle \Phi_k | \Phi_i \rangle = g_{kl}$

ist die Metrik festgelegt. Nach Teil I kann man annehmen, daß g Hermitesch ist, so daß auch hier

$$\langle \Phi_k | \Phi_l \rangle = \langle \Phi_l | \Phi_k \rangle^* \quad \text{gilt.}$$

Es ist zweckmäßig, eine zweite Basis mit kontravarianten Grundvektoren $|\Phi^l\rangle$ einzuführen. Sie sind durch

$$\langle \Phi^l | \Phi_m \rangle = \langle \Phi_m | \Phi^l \rangle = \delta_{lm}$$

definiert. Zum Beispiel erscheint der Vektor $\langle \Psi |$ dann als $\langle \Psi | = \Psi_l^* \langle \Phi^l |$ mit Ψ_l als kovarianten Maßzahlen.

[16] Vgl. W. Heisenberg, Nucl. Phys. **4**, 532—563 [1957], speziell S. 550.

* (Anm. 1—15 siehe Arbeit I, Z. Naturforschg. **15 a**, 448 [1960]; im folgenden mit I zitiert.)

Es wird

$$\langle X \mid \Psi \rangle = X_l^* \langle \Phi^l \mid \Phi_m \rangle \Psi^m$$
$$= X_l^* \langle \Phi^l \mid \Phi^m \rangle \Psi_m = X^{l*} \langle \Phi_l \mid \Phi^m \rangle \Psi_m$$
$$= X_l^* \langle \Phi^l \mid \Phi^m \rangle \Psi^m$$

oder

$$\langle X \mid \Psi \rangle = X_l^* \Psi^l = X^{l*} g_{lm} \Psi^m$$
$$= X_l^* g^{lm} \psi_m = X^{l*} \Psi_l .$$

Dabei ist

$$\langle \Phi^l \mid \Phi^m \rangle = g^{lm}$$

gesetzt; es gilt $(g^{-1})_{lm} = g^{lm}$. Insbesondere wird

$$\langle \Phi_l \mid \Psi \rangle = \Psi_l , \quad \langle \Phi^l \mid \Psi \rangle = \Psi^l .$$

Im Teil I wirken die Darstellungsmatrizen der Gruppentransformationen durchwegs auf die kontravarianten Maßzahlen der Vektoren in bezug auf eine feste kovariante Basis, d. h. man betrachtet die Bilinearformen $X^{l*} g_{lm} \Psi^m$, wofür kurz $(X, g\,\Psi)$ geschrieben wurde. Man könnte natürlich ebenso kovariante Maßzahlen verwenden; wenn zu dem Gruppenelement d die Matrix $V(d)$ bei Benutzung der kontravarianten Maßzahlen gehört, d. h.

$$(\Psi^l)' = V^l{}_m(d)\, \Psi^m ,$$

dann die Matrix $\{(V(d))^*\}^{-1}$ zu d, wenn man kovariante Maßzahlen benutzt, so daß die Bilinearformen X_l^* invariant sind.

Für den I-Operator ist hier anzusetzen:

$$I = \sum_m | \Phi_m \rangle \langle \Phi^m | = \sum_m | \Phi^m \rangle \langle \Phi_m |$$
$$= \sum_{n,m} | \Phi_m \rangle g^{mn} \langle \Phi_n | = \sum_{n,m} | \Phi^m \rangle g_{mn} \langle \Phi^n | .$$

So wird z. B.

$$\langle \Phi_m | A B | \Phi_n \rangle = \sum_l \langle \Phi_m | A | \Phi_l \rangle \langle \Phi^l | B | \Phi_n \rangle \quad \text{usw.}$$

Summiert man nicht über das vollständige System Φ_m, sondern nur über ein Teilsystem, so erhält man einen Projektionsoperator P_T

$$P_T = \sum_{m \subset T} | \Phi_m \rangle \langle \Phi^m | ,$$

wobei T eine Teilmenge der ganzen Indexmenge ist. Sei $\mathfrak{H}_T$ der Teilraum des Zustandsraumes, der durch die Φ_m mit $m \subset T$ aufgespannt wird. Ist $|\Psi\rangle$ in $\mathfrak{H}_T$, so wird $P_T |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$, ist $|X\rangle$ in $\mathfrak{C}\,\mathfrak{H}_T$ (Komplement von $\mathfrak{h}_T$), so wird $P_T | X \rangle = 0$, wie es sein muß. Setzt man

$$P^T = \sum_{m \subset T} | \Phi^m \rangle \langle \Phi_m | ,$$

so erhält man einen weiteren Projektionsoperator; der zugehörige Teilraum $\mathfrak{H}^T$, für den mit $|\Psi\rangle$ in $\mathfrak{H}^T$ gilt $P^T | \Psi \rangle = | \Psi \rangle$, ist im allgemeinen von $\mathfrak{h}_T$ verschieden. Wie bei definiter Metrik für Projektionsoperatoren wird auch hier

$$P_T^2 = P_T , \qquad P^{T2} = P^T .$$

Es gilt jedoch

$$P_T^\dagger = P_T , \qquad P^{T\dagger} = P^T ,$$

d. h. Projektionsoperatoren sind hier selbstadjungiert und nicht HERMITEsch.

Im folgenden wird in der Regel die kovariante Schreibweise benutzt; nur dort, wo das explizite Auftreten des Fundamentaltensors eine Formel deutlicher macht, soll die Schreibweise von Teil I (mit kontravarianten Maßzahlen!) angewandt werden.

§ 2. Zwei Arten von Symmetriegruppen

Im Teil I wurde gezeigt, wie invariante Bilinearformen zu erhalten sind. Es fragt sich, ob damit bereits genug getan ist, um zu einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu kommen. Es wird sich im weiteren Verlauf der Diskussion herausstellen, daß man bei gewissen Symmetriegruppen mehr verlangen muß, bei anderen kann man sich jedoch mit weniger begnügen. Das verschiedene Verhalten hängt mit der Zuordnung von physikalischen Systemen zu den Elementen des Zustandsraumes zusammen. Sofern man an der konventionellen Methode festhalten will, ist diese Zuordnung ja nicht eindeutig. Zu einem gegebenen physikalischen System gehört nicht ein Element φ des Zustandsraumes, sondern ein Strahl $c\,\varphi$, wo c eine komplexe Zahl $\neq 0$ ist, und selbst bei Normierung bleibt eine komplexe Zahl vom Betrag 1 frei. Wird ein physikalisches System durch Superposition zweier Elemente φ und ψ dargestellt, so kann man wohl $e^{i\lambda}(\varphi + \psi)$ statt $\varphi + \psi$ setzen, aber im allgemeinen wird $\varphi + e^{i\varkappa}\psi$ ein anderes System als $\varphi + \psi$ darstellen, d. h. die relative Phase der überlagerten Elemente hat physikalische Bedeutung. WICK, WIGHTMAN und WIGNER [17] haben aber festgestellt, daß es Fälle gibt, in denen die relative Phase der superponierten Elemente prinzipiell nicht meßbar ist, so daß $\varphi + \psi$ und $\varphi + e^{i\varkappa}\psi$ physikalisch nicht zu unterscheiden sind. Der Zustandsraum $\mathfrak{H}$ zerfällt damit in kohärente Sektoren $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n, \ldots$ derart, daß die relative Phase zweier Elemente, die ein und demselben kohärenten Sektor angehören,

[17] G. C. WICK, A. S. WIGHTMAN u. E. P. WIGNER, Phys. Rev. **88**, 546 [1952].

physikalische Bedeutung besitzt, während die Phase von zwei Elementen, die in verschiedenen kohärenten Sektoren liegen, prinzipiell nicht meßbar ist.

Hier soll unterschieden werden zwischen solchen Symmetriegruppen, deren Transformationen als Selbstabbildungen jedes Sektors auf sich gedeutet werden können, und anderen, welche die Sektoren nicht invariant lassen, sondern z. B. einen Sektor auf einen anderen abbilden.

Im ersten Fall reicht die Invarianz der Bilinearformen für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation nicht aus, im zweiten Fall kann man sich durch eine geringe Änderung der Definition der Übereinstimmungswahrscheinlichkeit von der Forderung der Invarianz der Bilinearformen befreien. Wir wenden uns zunächst dem ersten Fall zu.

§ 3. Der kohärente Sektor

a) Bemerkungen zum Eigenwertproblem. Das Energie-Impuls-Spektrum

Will man entscheiden, ob eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation möglich ist, so hat man alle denkbaren Meßvorgänge zu diskutieren. Eine Messung bedeutet im Formalismus der Quantenmechanik, daß man feststellt, welcher Eigenwert des Operators der zu messenden Größe vorliegt. Man hat sich demnach zunächst mit dem Eigenwertproblem bei indefiniter Metrik auseinanderzusetzen.

Hier soll zunächst an einige schon bekannte Tatsachen der allgemeinen Eigenwerttheorie bei indefiniter Metrik erinnert werden. Dann wenden wir uns speziell den infinitesimalen Operatoren der inhomogenen LORENTZ-Gruppe zu.

Für die Operatoren von physikalischen Größen hat man bei indefiniter Metrik selbstadjungierte Operatoren anzusetzen: Liege ein selbstadjungierter Operator

$$A = A^{\dagger} = g^{-1} A^{*} g \qquad \text{vor.}$$

I. A möge einen Eigenzustand φ mit dem Eigenwert a besitzen. Es wird gezeigt: Wenn die g-Norm $\langle\varphi|\varphi\rangle = (\varphi, g\,\varphi) \neq 0$ ist, dann ist a reell.

Beweis:

$$\langle\varphi|A|\varphi\rangle = (\varphi, g\,A\,\varphi) = (\varphi, A^{*}\,g\,\varphi) \qquad \text{oder}$$

$$a\,\langle\varphi|\varphi\rangle = a^{*}\langle\varphi|\varphi\rangle\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

Gegenüber HERMITEschen Operatoren bei definiter Metrik bleibt hier für die selbstadjungierten Operatoren immer noch die Möglichkeit von komplexen Eigenwerten, sobald die g-Norm des Eigenzustandes verschwindet.

II. Liegen zu A zwei Eigenzustände φ_1, φ_2 mit zwei verschiedenen Eigenwerten a_1, a_2 vor, dann gilt: Entweder sind a_1 und a_2 konjugiert-komplex, oder φ_1 ist orthogonal zu φ_2.

Beweis:

$$\langle\varphi_2|A|\varphi_1\rangle = \langle\varphi_2|A^{\dagger}|\varphi_1\rangle \qquad \text{oder}$$

$$a_1\,\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle = a_2^{*}\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle\,, \quad \text{woraus die Behauptung folgt.}$$

II a. Aus II. folgt für zwei reelle voneinander verschiedene Eigenwerte a_1 und a_2 unmittelbar, daß φ_1 und φ_2 orthogonal sind.

III. Man kann zeigen [18], daß selbst in endlich-dimensionalen Vektorräumen das Eigenvektorensystem eines selbstadjungierten Operators keine vollständige Basis zu liefern braucht. Es können nämlich Elementarteiler auftreten, so daß

(a) $\quad A\,\varphi = a\,\varphi + \psi$ wird und man beweist

(b) $\quad \langle\psi|\psi\rangle = 0\,.$

Wie in Teil I, § 5, festgestellt wurde, hängt die Einführung einer indefiniten Metrik im Zustandsraum wesentlich mit der Darstellungstheorie der nicht-kompakten Gruppen zusammen. Unter diesen spielt für die physikalische Anwendung die inhomogene LORENTZ-Gruppe die Hauptrolle. Die Transformationen der inhomogenen LORENTZ-Gruppe sind als Selbstabaldungen der kohärenten Sektoren auf sich aufzufassen (siehe Teil III, § 1). Es soll hier das Energie-Impuls-Spektrum als ein Beispiel von praktischer Bedeutung diskutiert werden, um dann im nächsten Abschnitt von dort aus das Problem der Wahrscheinlichkeitsinterpretation aufzurollen.

Betrachtet wird wieder ein Zustandsraum $\{\varphi\}$ und eine auf ihm induzierte Darstellung $\{V\}$ des ersten Stückes der LORENTZ-Gruppe. Der Fall, daß $\{V\}$ unitär ist oder unitär gemacht werden kann, soll von vornherein wegbleiben.

1. $\{V\}$ irreduzibel, $\{V\}$ äquivalent $\{(V^{*})^{-1}\}$.

Es wurde gezeigt, daß g und p_μ gleichzeitig diagonalisierbar sind und außerdem bewiesen, daß p_k, p_0 reelle Eigenwerte für die drei Impulskomponenten und die Energie besitzt. Der diagonale Fundamentaltensor kann ebenfalls reell gewählt werden und enthält bei entsprechender Normierung der Basis nur 1 oder -1 als Diagonalelemente. Vergleicht man das Ergebnis mit I, so ist also hier stets $\langle\varphi|\varphi\rangle \neq 0$ und die Eigenwerte der selbstadjungierten Operatoren p_k, p_0 sind in Übereinstimmung mit I reell. In Übereinstimmung mit II a sind dann zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen orthogonal. Die in III enthaltene Möglichkeit liegt hier nicht vor: Die Eigenfunktionen zu p_μ bilden eine vollständige Basis. Auch wenn $\{V\}$ nicht irreduzibel

[18] L. K. PANDIT, Suppl. Nuovo Cim. XI, Serie **X**, 157 [1959].

ist, aber in eine Anzahl irreduzibler Darstellungen vom hier besprochenen Typ (es können auch unitäre darunter vorkommen!) zerfällt, bleiben die gemachten Aussagen richtig.

2. Zwei irreduzible Darstellungen $\{V\}$ und $\{(V^*)^{-1}\}$ treten als direkte Summe auf

$$\{W\} = \begin{pmatrix} \{V\} & 0 \\ 0 & \{(V^*)^{-1}\} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad g = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder} \quad g = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}$$

ist und man den Darstellungsraum $\{\Phi\} = \begin{pmatrix} \{\varphi\} \\ \{\tilde{\varphi}\} \end{pmatrix}$ schreiben kann. Durch diese Wahl des Fundamentaltensors, welcher die Invarianz der Bilinearformen bedingt, werden auch p_k und p_0 wieder selbstadjungierte Operatoren. Denn es wird

$$\{(W^*)^{-1}\} = g^{-1}\{W\}\, g$$

und daraus folgt, wie in Teil I, Beweis von Satz 2 gezeigt, die Selbstadjungiertheit. Da mit der Darstellung $\{W\}$ auch der Infinitesimalring der Darstellung zerfällt, kann man die Operatoren

$$p_k\,, p_0 \quad (k=1,2,3) \quad \text{oder} \quad p_k \quad (k=0,1,2,3)$$

aufspalten, so daß $p_k = \begin{pmatrix} p_k^1 & 0 \\ 0 & p_k^2 \end{pmatrix}$ wird. Nach Teil I, Beweis von Satz 2, gehört, falls p_k^1 der Darstellung $\{V\}$ zugeordnet ist, $(p_k^1)^*$ zu der Darstellung $\{(V_1^*)^{-1}\}$. Man kann daher schreiben $p_k = \begin{pmatrix} p_k^1 & 0 \\ 0 & (p_k^1)^* \end{pmatrix}$ p_k^1 und $(p_k^1)^*$ besitzen nach Teil I, Satz 9, konjugiert-komplexe Eigenwerte. Außerdem sieht man, falls die Eigenfunktion φ_l^n am Unterraum $\{\varphi\}$ zum Eigenwert a_l^n und die Eigenfunktion χ_l^n aus dem Unterraum $\{\tilde{\varphi}\}$ zum Eigenwert $(a_l^n)^*$ gehören, φ_l^n und χ_l^n nicht orthogonal sind. Man kann diese Eigenschaft wieder mit den Sätzen I und II vergleichen. Auch in dem vorliegenden Fall darf man annehmen. daß die Eigenvektoren zu p_k, p_0 eine vollständige Basis bilden.

3. Als letztes Beispiel werde eine nicht zerfallende reduzible Darstellung $\{W\} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix}$ betrachtet, wobei $\{V\}$ nur für Translationen von Null verschieden, $\{V_1\}$ irreduzibel und äquivalent zu $\{(V_1^*)^{-1}\}$ sein soll. Außerdem mag an $\{W\}$ die in Teil I, § 4 d, angegebene Konstruktion schon durchgeführt sein, so daß mit der Untermatrix g_2 des Fundamentaltensors $\pm\{V_1^*\}\, g_2\{V\} + \{V^*\}\, g_2\{V_1\} = 0$ bereits erfüllt ist und

$$g = \begin{pmatrix} 0 & g_2 \\ g_2 & \lambda g_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad g = \begin{pmatrix} 0 & i\, g_2 \\ -i\, g_2 & \lambda g_2 \end{pmatrix}$$

g_2 HERMITEsch gewählt werden kann. Bezeichnet man den Darstellungsraum mit $\{\Phi\} = \begin{pmatrix} \{\varphi\} \\ \{\tilde{\varphi}\} \end{pmatrix}$, so liegen für den Unterraum $\{\varphi\}$ für sich allein genommen die Verhältnisse wie beim Beispiel 1 vor. Jedoch bedingt die Tatsache, daß die Darstellung nicht zerfällt und so der Unterraum $\{\tilde{\varphi}\}$ bei Transformationen in den Unterraum $\{\varphi\}$ hineinwirkt, daß $g_1 = 0$ gesetzt werden muß. Damit besitzen die Operatoren p_k, p_0 innerhalb $\{\varphi\}$ Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten, die eine vollständige Basis bilden, die Erwartungswerte werden jedoch alle Null. Im Unterraum $\{\tilde{\varphi}\}$ dagegen kann man zwar $g_4 = \lambda\, g_2$ nicht ausgeartet und HERMITEsch wählen, aber es fehlt eine vollständige Basis von Eigenvektoren zu p_k, p_0. Es ist sogar so, daß im Teilraum $\{\tilde{\varphi}\}$ nicht ein einziger Eigenvektor zu p_μ gefunden werden kann. Das sieht man so ein: Die infinitesimalen Operatoren p_μ^1 zu $\{V_1\}$ können nach Voraussetzung diagonal angenommen werden, so daß allgemein für einen Zustand χ aus dem zweiten Teilraum $\{\tilde{\varphi}\}$ mit

$$p_\mu^W\, \Phi = \begin{pmatrix} p_\mu^1 & p_\mu \\ 0 & p_\mu^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\mu\, \chi \\ p_\mu^1(\chi)\, \chi \end{pmatrix}$$

wird. $p_\mu^1(\chi)$ ist der zu p_μ^1 zugehörige Eigenwert in der Darstellung $\{V_1\}$. Es werde nun angenommen, daß es in $\{\tilde{\varphi}\}$ einen Eigenzustand χ_e zu p_μ^W gibt. Es wird $p_\mu^W\, \chi_e = p_\mu^W(e)\, \chi_e = p_\mu^1(e)\, \chi_e$, denn es muß $p_\mu\, \chi_e = 0$ sein. Mag χ_e im Teilraum $\{\tilde{\varphi}\}$ z. B. an erster Stelle stehen. Allen infinitesimalen Transformationen sind dann solche Matrizen zugeordnet, die in der ersten Spalte nur Nullen besitzen.

$$\{V\}_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{v}} \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Wegen g_2 diagonal folgt

$$g_2^{-1}\{V^*\}_{\text{inf}}\, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ \boxed{\tilde{\tilde{v}}} \end{pmatrix}$$

und da weiter $g_2^{-1}\{V^*(t)\}\, g_2 = \pm\{V(-t)\}$ verlangt wurde (siehe Teil I, § 4 d), ergibt sich

$$\{V\}_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\hat{v}} \end{pmatrix}.$$

Für irgendeine Translation folgt dann aus

$$\{W\} = e^{\{W\}_{\text{inf}}}, \quad \text{daß} \quad \{V(t)\} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\{\hat{v}(t)\}} \end{pmatrix}$$

und damit allgemein für ein Gruppenelement

$$\{V(d)\} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\{\hat{v}(d)\}} \end{pmatrix}$$

wird, wovon man sich durch die Multiplikation der entsprechenden Matrizen überzeugt. Und diese Gestalt von $\{V(d)\}$ führt zu einem Widerspruch. Denn wegen des Nichtzerfallens der Darstellung muß man annehmen, daß man zu einer Matrix $W(t_1)$, mit t_1 als Translation, jedenfalls in $\{\tilde{\varphi}\}$ mindestens ein Element χ_a findet, so daß $W(t_1)\,\chi_a = a\,\chi_a + \varphi_a$ gilt, mit φ_a in $\{\varphi\}$ und $\varphi_a \neq 0$. Da $\{\varphi\}$ der Darstellungsraum der irreduziblen Darstellung $\{V_1\}$ ist, gibt es ein Gruppenelement d_1 mit d_1 in $\mathfrak{L}_{h1}$ (die Translationen sind diagonal!), so daß

$$V_1(d_1)\,\varphi_a = c_1\,\varphi_1 + \dots$$

gilt, mit φ_1 in $\{\varphi\}$ und an erster Stelle im Unterraum $\{\varphi\}$. Damit wird mit $W(d_1)\,W(t_1) = W(d)$

$$\begin{aligned} W(d_1)\,W(t_1)\,\chi_a &= a\,W(d_1)\,\chi_a + W(d_1)\,\varphi_a \\ &= a\,W(d_1)\,\chi_a + V(d_1)\,\varphi_a \end{aligned}$$

und deshalb $\quad W(d)\,\chi_a = \chi_b + c_1\,\varphi_1 + \dots\,.$

Und dieses widerspricht dem obigen Aussehen von $\{V(d)\}$. Es liegt also die Möglichkeit, auf die III hinweist, in ausgedehntem Maße vor. Wird doch $\{\tilde{\varphi}\}$ sehr häufig, und wenn $\{V_1\}$ unitär und nicht trivial sein sollte, mit Sicherheit ein unendlich-dimensionaler Unterraum sein. Man findet auch die Eigenschaft von (a) und (b) bestätigt. An Stelle von φ tritt hier ein Element aus $\{\tilde{\varphi}\}$, an Stelle von ψ eins aus $\{\varphi\}$, und für letzteres ist die g-Norm Null.

b) Versagen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Um die zentrale Schwierigkeit, die sich für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation ergibt, aufzuzeigen, soll von dem ersten Beispiel $\{V\}$ äquivalent $\{(V^*)^{-1}\}$, $\{V\}$ irreduzibel, des letzten Abschnitts ausgegangen werden. Hinsichtlich Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und damit der Möglichkeit der Zerlegung der I nach Projektionsoperatoren schließt sich dieser Fall eng an die Verhältnisse an, die sonst in den meisten Fällen bei definiter Metrik im Zustandsraum vorliegen oder wenigstens stillschweigend angenommen werden.

Um möglichst einfach zu bleiben, denken wir das kontinuierliche Energie-Impuls-Spektrum durch eine Periodizitätsbedingung abzählbar gemacht und verfügen dann in den Eigenvektoren φ_i über ein vollständiges System im Darstellungsraum $\{\varphi\}$; dieses soll als Basis dienen. g kann dann diagonal mit Elementen $+1$ und -1 in der Diagonale angenommen werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle\varphi\,|\,\varphi\rangle &= \sum_m \langle\varphi\,|\,\varphi^m\rangle\,\langle\varphi_m\,|\,\varphi\rangle \\ &= \sum_{m,n} \langle\varphi\,|\,\varphi_m\rangle\, g^{mn} \langle\varphi_n\,|\,\varphi\rangle\,. \end{aligned}$$

Da g_{mn} mithin auch g^{mn} diagonal sind mit Elementen ± 1, so erhält man bei normierten φ

$$1 = \langle\varphi\,|\,\varphi\rangle = \sum_m |\,c_m\,|^2\,\varepsilon_m = \sum_m y_m$$

mit $\qquad \varepsilon_m = \pm 1\,, \quad |\,c_m\,|^2 = |\langle\varphi\,|\,\varphi_m\rangle|^2\,.$

Man ist natürlich versucht, die Größen $|\,c_m\,|^2\,\varepsilon_m = y_m$, deren Summe 1 ergibt, als Wahrscheinlichkeit dafür anzusehen, daß eine Impulsmessung den Zustand φ_m ergibt, und muß gleichzeitig erkennen, daß diese Wahrscheinlichkeitsinterpretation wegen der Indefinitheit der Glieder rechts versagt. Man könnte vielleicht annehmen, daß bei der Zerlegung eines Zustands nach Eigenzuständen φ_m stets nur solche Komponenten auftreten, die ein positives ε_m besitzen. Allein wenn man den Zustand φ aus einer hinreichend scharfen Ortsmessung hervorgegangen denkt, so treten bei der Zerlegung alle möglichen φ_m gleichzeitig auf, und dann kommen negative y_m vor.

Der eingetretene Sachverhalt ist der folgende: Man hat zwar durch die Invarianz der Bilinearformen erreicht, daß die $\langle\varphi\,|\,\varphi_m\rangle^2$ und damit auch die y_m bei einer LORENTZ-Transformation invariant bleiben und so eine für die Übereinstimmungswahrscheinlichkeiten notwendige Eigenschaft erfüllen, aber sie befriedigen nicht die Forderung der Definitheit oder wenigstens der Semi-Definitheit.

Die Methode ist jedoch darauf angelegt, die y_m am Ende doch als Wahrscheinlichkeiten zu interpretieren; das läßt sich nur erreichen, wenn man den Raum der Zustandsvektoren, denen man physikalische Systeme zuordnen will, durch bestimmte Bedingungen weiter einengt. In diesem Teilraum muß man dann die y_m widerspruchsfrei als Wahrscheinlichkeiten interpretieren können. Daneben darf der Zustandsraum auch noch einen Teilraum enthalten, dessen Elemente keine physikalischen Systeme (sondern „Geister“) repräsentieren und daher eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation für die Zustände dieses Teilraumes nicht erforderlich ist.

c) Einschränkende Bedingungen für den Unterraum der physikalischen Zustände [19]

Heiße der Zustandsraum eines Sektors $\mathfrak{S}$. Es wird verlangt, daß in $\mathfrak{S}$ ein Teilraum $\mathfrak{S}'$ existiert, der die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

[19] Eine ähnliche Bedingung hat zuerst WIGHTMAN in einer Vorlesung „Les Champs Quantifiés“, Paris 1957, unveröffentlicht, aufgestellt. Dort steht statt $\mathfrak{S}$ der ganze Zustandsraum $\mathfrak{H}$ und die Invarianz von $\mathfrak{S}'$ wird nur für die inhomogene LORENTZ-Gruppe gefordert.

(A) $\mathfrak{S}'$ sei invariant unter den Symmetriegruppen, welche eine Selbstabbildung der Sektoren auf sich bewirken, also insbesondere invariant unter den Transformationen der inhomogenen LORENTZ-Gruppe.

(B) Die Elemente φ aus $\mathfrak{S}'$ sollen eine semidefinite g-Norm besitzen:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle \geqq 0 .$$

Der Teilraum $\mathfrak{S}'$ soll später durch eine weitere, nicht sehr einschneidende Modifikation zum Raum der physikalischen Zustände werden. Es leuchtet bereits jetzt ein, daß dann durch die Bedingungen (A) und (B) die Wahrscheinlichkeitsinterpretation gelingen wird.

Man sieht andererseits auch, daß (A) und (B) notwendig sind: Die Symmetrieoperationen, insbesondere die Transformationen der LORENTZ-Gruppe, führen ja vom aktiven Standpunkt aus gedeutet einen physikalischen Zustand in andere Zustände über, denen auch physikalische Systeme zugeordnet sind. Soll also (B) für alle physikalischen Systeme gelten, so muß man (A) fordern. (B) ist aber notwendig, sofern man am Superpositionsprinzip festhält, das ja in einem kohärenten Sektor gelten soll. Ließe man in $\mathfrak{S}'$ auch Zustände negativer g-Norm zu, so ergäbe die Superposition eines Zustandes positiver Norm φ^+ mit einem Zustand negativer Norm φ^- einen Zustand $\varphi = c^+ \varphi^+ + c^- \varphi^-$, für den die Wahrscheinlichkeitsinterpretation mißlingt.

Ehe diese Forderungen an Hand der Darstellungen der inhomogenen LORENTZ-Gruppe diskutiert werden, sollen zwei Sätze über Nullvektoren (d. h. Vektoren von der g-Norm Null) folgen: Der erste Satz betrifft eine besondere Klasse von Nullvektoren.

1) In einem Raum $\mathfrak{R}$ mit indefiniter Metrik bilden die Vektoren, welche zu allen Vektoren von $\mathfrak{R}$ orthogonal sind, einen invarianten Teilraum $\mathfrak{O}$.

Beweis: I) Sie bilden einen Teilraum: Denn mit φ und ψ steht auch $a\,\varphi + b\,\psi$ zu allen Vektoren senkrecht.

II) Sie bilden einen invarianten Teilraum: Es ist zu zeigen: Mit φ ist auch $V(d)\,\varphi$ in $\mathfrak{O}$ [$V(d)$ eine Matrix der Darstellung]. Sei χ irgendein Element von $\mathfrak{S}$. Es gilt

$$\begin{aligned}(\chi, g\,V(d)\,\varphi) &= (\chi, [V^*(d)]^{-1}\, g\,\varphi) \\ &= (\chi, V^*(d^{-1})\, g\,\varphi) = 0 ,\end{aligned}$$

da $V(d^{-1})\,\chi$ ein Element aus $\mathfrak{S}$ ist und mithin auf φ senkrecht steht.

2) In einem Raum $\mathfrak{S}'$ mit semidefiniter Metrik bilden die Nullvektoren $\mathfrak{N}'$ einen Teilraum. Dieser ist mit dem Teilraum $\mathfrak{O}'$, der von dem auf allen Vektoren von $\mathfrak{S}'$ senkrecht stehenden Vektoren gebildet wird, identisch und daher invariant, sofern $\mathfrak{S}'$ invariant ist.

Beweis: Der zweite Teil der Behauptung folgt aus 1). Es muß noch bewiesen werden $\mathfrak{O}' = \mathfrak{N}'$. Man sieht sofort, daß $\mathfrak{N}'$ den Teilraum $\mathfrak{O}'$ umfaßt. Also braucht man nur zu zeigen: Falls φ ein Nullvektor, ist φ zu allen Vektoren von $\mathfrak{S}'$ orthogonal. Das folgt aber aus der SCHWARZschen Ungleichung, die auch noch für semidefinite Räume gilt. Sei χ ein beliebiges Element von $\mathfrak{S}'$, so wird

$$|\langle \chi | \varphi \rangle|^2 \leqq \langle \chi | \chi \rangle \langle \varphi | \varphi \rangle ,$$

woraus $\langle \chi | \varphi \rangle = 0$ folgt, was zu beweisen war.

Seien die Räume $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ wie auf der Abb. 1 dargestellt. Dann kann man, um die Verhältnisse möglichst festzulegen, $\mathfrak{S}'$ maximal wählen, d. h. zu $\mathfrak{S}'$ ganz $\mathfrak{O}$ schlagen. Wie man aus Satz 1) erkennt, erfüllt, falls $\mathfrak{S}'$ den Bedingungen (A) und (B) genügte, auch der so erweiterte Raum die Bedingungen (A) und (B). Es ergeben sich die in Abb. 2 dargestellten Verhältnisse.

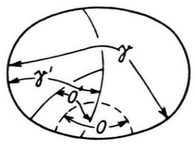

Abb. 1.

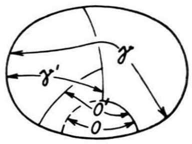

Abb. 2.

Um zu einem Raum für physikalische Zustände zu gelangen, geht man von $\mathfrak{S}'$ durch eine geringe Modifikation später zu einem definiten Raum über. Doch bereits an dieser Stelle kann man für die im Teil I behandelte inhomogene LORENTZ-Gruppe untersuchen, welche Typen von Darstellungen man zu $\mathfrak{S}'$ schlagen darf und welche nicht.

Wir denken uns in $\mathfrak{S}$ die Darstellungen soweit wie möglich ausreduziert. Zu jeder irreduziblen Darstellung $\{V\}$, wo $\{V\}$ nicht äquivalent $\{(V^*)^{-1}\}$ ist, soll bereits ein Darstellungsraum, auf dem $\{(V^*)^{-1}\}$ induziert wird, hinzugefügt sein, so daß ein nichttrivialer Fundamentaltensor existiert. Von den reduziblen, aber nicht zerfallenden Darstellungen sollen keine komplizierteren als die besprochenen auftreten. Außerdem sollen die Darstellungsräume mit HERMITEschen Fundamentaltensoren versehen sein, was ja nach Teil I stets möglich ist. Die Untermatrix g_1 bei den nicht zerfallenden Darstellungen muß natürlich $g_1 = 0$ sein. Die Verhältnisse sind in Abb. 3 dargestellt.

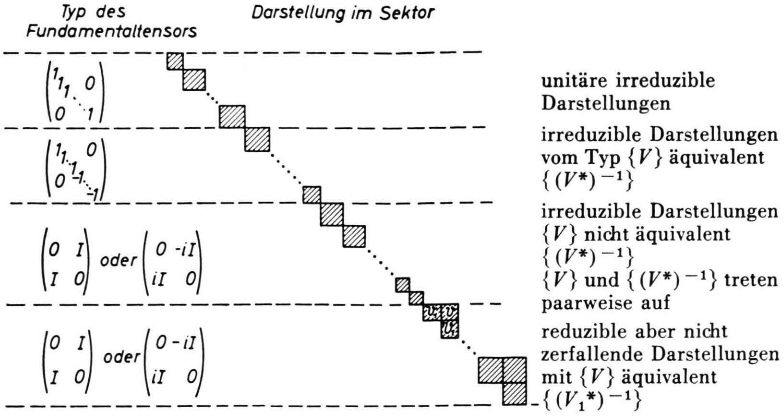

Abb. 3.

I) Die Darstellungsräume zu unitären irreduziblen Darstellungen dürfen natürlich zu $\mathfrak{S}'$ gehören, wenn sie den Fundamentaltensor λI, $\lambda > 0$ besitzen.

II) Keiner der Darstellungsräume zu den irreduziblen Darstellungen vom Typ $\{V\}$ äquivalent $\{(V^*)^{-1}\}$ darf ganz oder teilweise zu $\mathfrak{S}'$ gehören.

III) Von den jeweils paarweise auftretenden Darstellungen $\{(V^*)^{-1}\}$ und $\{V\}$, wobei $\{(V^*)^{-1}\}$ und $\{V\}$ nicht zueinander äquivalent sind, darf jeweils eine und nur eine irreduzible jedes Paares zu $\mathfrak{S}'$ geschlagen werden. Eine Superposition von zwei Elementen, von denen das eine im Darstellungsraum von $\{V\}$, das andere im Darstellungsraum zu $\{(V^*)^{-1}\}$ liegt, wird nämlich bei entsprechender Wahl der relativen Phase zu einer negativen Norm führen.

IV) Um die Abbildung nicht zu überlasten, ist für die nicht zerfallenden, aber reduziblen Darstellungen nur die Möglichkeit $g_4 = 0$ angegeben.

a) Bei dem eingezeichneten Typ des Fundamentaltensors, wo also $g_2^{-1}\, V^*(t)\, g_2 = \pm V(-t)$ sein muß und außerdem $g_4 = 0$ gesetzt wurde, darf wie unter III) nur der eine der beiden Darstellungsräume von jeder nicht zerfallenden Darstellung zu $\mathfrak{S}'$ kommen. Diesmal ist man jedoch im Gegensatz zu III auf einen, nämlich jeweils den oberen aus Gründen der Bedingung (A) festgelegt.

b) An diesem Sachverhalt ändert sich nichts, wenn man statt $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}$ den Fundamentaltensor mit entsprechendem $g_4 \neq 0$, also

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & g_4 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & g_4 \end{pmatrix}$$

wählt, was man ja tun kann.

c) Falls die in der nicht zerfallenden aber reduziblen Darstellung auftretenden irreduziblen Darstellungen $\{V_1\}$ unitär sind, so kann man $g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ wählen und darf dann den ganzen Darstellungsraum, der zu einer reduziblen, aber nicht zerfallenden Darstellung gehört, zu $\mathfrak{S}'$ schlagen.

Für die Trennung von $\mathfrak{S}$ in einen invarianten Unterraum $\mathfrak{S}'$, welcher die Bedingung (A) zusammen mit (B) erfüllt, und einen Rest $\complement\,\mathfrak{S}'$ treten, wie man sieht, die folgenden bemerkenswerten Züge auf: Es kann durchaus vorkommen, daß der Fundamentaltensor nicht simultan mit dieser Trennung zerfällt, wie die Fälle III) und IV) (außer IV c) zeigen. In den Fällen IV) ist es sogar so, daß durch Anwendung von Transformationen $\complement\,\mathfrak{S}'$ nach $\mathfrak{S}'$ hineinwirkt.

Der Raum $\mathfrak{D}$ der Vektoren, die auf allen anderen von $\mathfrak{S}$ senkrecht stehen, setzt sich, wenn keine anderen Darstellungen als die aufgeführten auftreten und man die Fundamentaltensoren wie angegeben wählt, aus den ersten Unterräumen der unter IV c) auftretenden nicht zerfallenden, aber reduziblen Darstellungen zusammen. Der Raum $\mathfrak{D}$ kann leer sein, wenn diese Darstellungen in $\mathfrak{S}'$ nicht vorhanden sind, er kann auch größer sein, wenn man gewisse der Fundamentaltensoren identisch Null wählt.

d) Übergang von $\mathfrak{S}'$ zum Raum der physikalischen Zustände $\mathfrak{S}''$

Da aus $\mathfrak{S}'$ durch eine Einschränkung ein Raum für physikalische Zustände gewonnen werden soll, wird gefordert:

(C) Alle Elemente φ_k von $\mathfrak{S}$, denen ein physikalisches System zugeordnet ist, sollen in $\mathfrak{S}'$ liegen.

Dadurch ist gewährleistet, daß eine Messung an einem physikalischen System dieses nicht in einen Zustand, dem ein Element in $\mathfrak{C}\,\mathfrak{S}'$ (Komplement von $\mathfrak{S}'$ inerehalb $\mathfrak{S}$) zugeordnet ist, bringen kann, d. h.

$$A_m \,|\, \varphi_k\rangle = |\, \varphi_l\rangle \quad \text{mit } \varphi_l \text{ in } \mathfrak{S}', \text{ sofern } \varphi_k \text{ in } \mathfrak{S}'.$$

Nunmehr werde in $\mathfrak{S}'$ der Unterraum $\mathfrak{N}'$ der Nullvektoren, der (nach Satz 2, Teil II, § 3 c) mit $\mathfrak{D}'$, dem Raum der auf allen Vektoren von $\mathfrak{S}'$ senkrecht stehenden Vektoren identisch ist, betrachtet. Auch falls $\mathfrak{D}$ leer war, braucht der Unterraum von $\mathfrak{D}'$ durchaus nicht leer zu sein, er setzt sich aus den ersten Teilräumen, die von den unter III), IVa) und IVb) aufgeführten Darstellungsräumen zu $\mathfrak{S}'$ geschlagen wurden, zusammen. Jedes φ_k in $\mathfrak{S}'$ läßt sich schreiben:

$$\varphi_k = \hat{\varphi}_k + \hat{\hat{\varphi}}_k ,$$

wobei $\hat{\hat{\varphi}}_k$ in $\mathfrak{D}'$, $\hat{\varphi}_k$ in $\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}'$ (mit $\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}'$ Komplement von $\mathfrak{D}'$ innerhalb $\mathfrak{S}'$) liegen. Für die Matrixelemente eines Operators A_m erhält man

$$\langle \varphi_i \,|\, A_m \,|\, \varphi_k \rangle = \langle \hat{\hat{\varphi}}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\hat{\varphi}}_k \rangle + \langle \hat{\varphi}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\hat{\varphi}}_k \rangle + \langle \hat{\hat{\varphi}}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\varphi}_k \rangle + \langle \hat{\varphi}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\varphi}_k \rangle .$$

Die ersten drei Glieder rechts fallen weg, so daß $\langle \varphi_i \,|\, A_m \,|\, \varphi_k \rangle = \langle \hat{\varphi}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\varphi}_k \rangle$ wird. Zu den Erwartungswerten tragen also nur die Komponenten in $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}')$ bei.

Man ändert nichts an dem physikalischen Gehalt, wenn man von $\mathfrak{S}'$ zum Quotientenraum $\mathfrak{S}'/\mathfrak{D}' = \mathfrak{S}''$ übergeht, indem man jedes Element φ_k von $\mathfrak{S}'$ auf $\hat{\varphi}_k$ von $\mathfrak{S}''$ abbildet.

$\mathfrak{S}''$ ist ein Raum, der eine definite Metrik trägt und auf dem die Transformationsgruppen unitäre Darstellungen induzieren. Er kann daher als Raum, dessen Elementen physikalische Systeme zugeordnet sind, verwendet werden, ohne daß man mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation in Widerspruch gerät.

Bemerkungen über die kanonischen Energie-Pseudotensoren der allgemein-kovarianten Wellenfeldtheorien

Von GÉZA KNAPECZ *

(Z. Naturforschg. **15 a**, 467—470 [1960]; eingegangen am 16. Juni 1959)

Es wird mit Hilfe allgemeingültiger Argumente gezeigt, daß man den starken und schwachen kanonischen Energie-Pseudotensor eines beliebigen allgemein kovarianten Wellenfeldes unabhängig von seinem schlechten Transformationscharakter nicht als den Vertreter der Energie deuten kann.

In der allgemein-kovarianten LAGRANGE-Theorie beliebiger Wellenfelder kann man drei Ausdrücke ableiten, die als Veretreter der Energie in Betracht kommen:

a) den kovarianten Quellentensor des Gravitationsfeldes T_i^k $(i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$,

b) den starken nichtkovarianten kanonischen Pseudotensor Θ_i^k, und

c) den schwachen nichtkovarianten kanonischen Pseudotensor ϑ_i^k.

Im Vergleich mit dem Energietensor t_i^k der affinkovarianten Theorien verhalten sich diese Größen folgendermaßen. T_i^k transformiert sich als ein Tensor; er hat einen invarianten Sinn; für ihn gilt eine kovariante Pseudokontinuitätsgleichung $T_i^k{}_{:k} = 0$; er ist aber zu einem Gesamtenergieimpuls nicht integrabel. Θ_i^k und ϑ_i^k transformieren sich nicht wie Tensoren; sie sind deswegen koordinatenabhängig („Scheingrößen"); für sie gilt je eine nichtkovariante Kontinuitätsgleichung $\Theta_i^k{}_{,k} = 0$ und $\vartheta_i^k{}_{,k} = 0$, und je ein Integralerhaltungssatz $\oint \Theta_i^k \, \mathrm{d}^3 x_k = 0$ und $\oint \vartheta_i^k \, \mathrm{d}^3 x_k = 0$; sie sind zu einem Gesamtpseudoenergieimpuls integrabel, aber die gewonnenen Integrale $\int \Theta_i^k \, \mathrm{d}^3 x_k$ und $\int \vartheta_i^k \, \mathrm{d}^3 x_k$ transformieren sich im allgemeinen nicht wie Vektoren.

Also weder T_i^k, noch Θ_i^k und ϑ_i^k besitzen alle Eigenschaften des affin-kovarianten Tensors t_i^k. In der Literatur „konkurrieren" noch immer miteinander die kovarianten und nichtkovarianten Ausdrücke als die Vertreter der Energie. Zum Beispiel läßt sich nach LANDAU und LIFŠIC [1] $T_i^k{}_{:k} = 0$ nicht als Energieerhaltung deuten. Dagegen vertritt DIRAC [2] die Ansicht, daß man einen befriedigenden Energiepseudotensor nicht finden kann.

* G. KNAPECZ, Postfach 20, Budapest 112, Ungarn.

[1] L. LANDAU u. E. LIFŠIC, Teorija polja, Moskva 1948, S. 328.

[2] P. A. M. DIRAC, Phys. Rev. (Lett.) **2**, 368 [1959].